

Remarques sur l'imagination : perception, mathématiques et liberté

Luciano Boi

Abstract:

The spatial imagination and visualization are an essential component of mathematical understanding and of knowledge. Both, geometric view and spatial visualization are helpful tools allowing for a better adaptation of our organism to the varying environmental conditions. It is likely that some of the most intriguing and profound mathematical mysteries of our human beings' life was cached by the dimensions three and four of space. In this sense, these "low" dimensions have captured precious information and clues about our intuition, perception and grasping of space. Of course, when we pass on to a productive thinking of abstract geometric objects such as, for example, n -dimensional space, fiber spaces, connections, module spaces, topoi, and numerous other algebraic and topological structures that belong specifically to modern mathematics, and where sensory intuition is lacking, another type of mathematical imagination and visualization is required, and therefore we need a deeper form of intuition.

The imagination is also essential for developing our resistance against the militarization of science and the use of technologies for war, the destruction of cities' infrastructures and the elimination of human life. We need imagination for standing with scientists, scholars and people in the imperative combat for freedom, justice and the acknowledgement of philosophical and anthropological diversity. Furthermore, imagination is needed for assuring the autonomous creativity of peoples and the critical openness of minds. Only by means of imagination we can resist and stand opposed to the uniform thinking and be able to promote a real scientific, philosophical and cultural pluralism.

Keywords: *Imagination, visualization, intuition, space, geometry, perception, colors, time, alternative logics, resistance, freedom.*

CONTACT: Luciano Boi, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Centre de Mathématiques, bureau A4-20, 54, boulevard Raspail - 75006 Paris (lboi @ehess.fr)



Aion Journal of Philosophy and Science

© 2025 the Authors

This work is licensed under a

[Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](#).

Resumé

L'imagination spatiale et la visualisation sont des composantes essentielles de la compréhension mathématique et de la connaissance. La vision géométrique et la visualisation spatiale sont toutes deux des outils précieux qui permettent une meilleure adaptation de notre organisme aux conditions environnementales changeantes. Il est probable que certains des mystères mathématiques les plus intrigants et profonds de la vie humaine soient liés aux troisièmes et quatrièmes dimensions de l'espace. En ce sens, ces « basses » dimensions ont capturé des informations précieuses et des indices sur notre intuition, notre perception et notre compréhension de l'espace. Bien entendu, lorsque nous passons à une réflexion productive sur des objets géométriques abstraits tels que, par exemple, l'espace n-dimensionnel, les espaces fibrés, les connexions, les espaces de modules, les topos et de nombreuses autres structures algébriques et topologiques propres aux mathématiques modernes — là où l'intuition sensorielle fait défaut — un autre type d'imagination et de visualisation mathématique est requis. Il nous faut alors une forme d'intuition plus profonde.

L'imagination est également essentielle pour développer notre résistance à la militarisation de la science et à l'utilisation des technologies à des fins de guerre, de destruction des infrastructures urbaines et d'élimination de la vie humaine. Nous avons besoin d'imagination pour nous tenir aux côtés des scientifiques, des chercheurs et des citoyens dans le combat impératif pour la liberté, la justice et la reconnaissance de la diversité philosophique et anthropologique. De plus, l'imagination est nécessaire pour garantir la créativité autonome des peuples et l'ouverture critique des esprits. Ce n'est qu'à travers l'imagination que nous pouvons résister à la pensée unique et promouvoir un véritable pluralisme scientifique, philosophique et culturel.

Mots clés : Imagination, visualisation, intuition, espace, géométrie, perception, couleurs, temps, logiques alternatives, résistance, liberté.

« Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la qualité de son attention, à l'écoute de la voix des choses. Car les choses de l'Univers ne se lassent jamais de parler d'elles-mêmes et de se révéler à celui qui se soucie d'entendre. »

Alexandre Grothendieck

« L'immaginazione è la prima fonte della felicità umana.»

Giacomo Leopardi

« L'imagination veut toujours à la fois rêver et comprendre, rêver pour mieux comprendre, comprendre pour mieux rêver. »

Gaston Bachelard

« La liberté, comme la mathématique, est fille de l'imagination. »

René Thom

1. Imagination e perception

À partir des années quatre-vingt du siècle dernier les théories « connexionnistes » ont connu un certain essor et succès. D'un point de vue scientifique, on peut dire qu'elles sont essentiellement un prolongement de la cybernétique qui s'est développée à partir des années 1950 aux États-Unis puis de spacela théorie de l'information appliquée aux circuits électroniques et aux réseaux informatiques. D'un point de vue plus philosophique, elles font surtout appel aux théories de l'animal-machine et de l'homme-machine qui remontent, respectivement, à René Descartes et à La Mettrie ; puis, beaucoup plus récemment (au début des années 1980), à une approche dite « computationnelle » en sciences cognitives et dont les principales applications ont concerné la théorie de la vision par des descriptions algorithmiques et des implémentations matérielles. Relativement au problème de la perception et de la cognition spatiale, la théorie « connexionniste » repose entièrement sur le postulat à notre avis très peu vraisemblable selon lequel les mécanismes cognitifs de la perception seraient de la même nature et agiraient de la même façon que les mécanismes qui permettent à un ordinateur ou à toute autre machine « intelligente » de fonctionner. Mais peut-il un tel postulat servir de fondement à une théorie de la perception humaine.

Une simple remarque semble à ce propos s'imposer d'emblée. Il existe très peu de systèmes biologiques et même de systèmes physiques qui soient fermés et autosuffisants, c'est-à-dire dont le fonctionnement n'a besoin d'aucun échange

énergétique, thermodynamique ou autre avec l'extérieur. À plus forte raison, tout système vivant, et un organisme qui perçoit est un système vivant par excellence, présente la caractéristique fondamentale d'être constamment en interaction avec l'environnement naturel (physique, chimique et biologique) proche et peut-être pas seulement proche. De plus, il possède ce qu'on peut appeler une "mémoire psychique", en ce sens qu'il réactualise dans le présent les compétences passées appréhendées au cours de (et pour) son développement. À cet égard, notre perception subjective de la réalité est tributaire des événements culturels et symboliques et plus généralement anthropologiques au contact desquels nous avons vécu et qui ont façonné nos expériences. Ces deux sources de la perception constituent ce qu'on pourrait qualifier de « milieu vital ». Elles agissent aussi bien sur l'évolution ontogénétique que phylogénétique des capacités perceptives des espèces et surtout des primates, et, par ailleurs, elles confèrent à l'espèce humaine des qualités cognitives extraordinaires et tout à fait spécifiques, qui la rendent singulièrement prééminente comparée à tout autre espèce, tant sur le plan de sa morphologie et de la complexité neurophysiologique, que de ses facultés proprement mentales ; celles-ci reposent beaucoup plus sur l'imagination que sur les sensations.

La reconnaissance des formes dans notre espace ambiant est l'un des problèmes fondamentaux de la perception, et on comprend aisément qu'il est d'un intérêt vital pour nous, pour toutes nos actions quotidiennes, voire même pour notre survie. C'est à partir d'une connaissance plus approfondie du genre de processus sous-jacents à la reconnaissance des formes, qu'il nous paraîtrait possible de surmonter l'écart entre deux niveaux importants de la perception : celui de la reconnaissance et classification des formes par une action intégrée des différents systèmes sensoriels et du système nerveux central, et le niveau des représentations sémantiques et de l'attribution de sens aux événements de la perception. Il faut cependant préciser tout de suite que cette relation ne doit pas être selon nous conçue en les termes d'une sous-détermination du second niveau par le premier, à savoir de la sphère du sens et de la pensée par les substrats physique et neurophysiologique du cerveau, mais bien plutôt comprise selon une relation de continuité et de discontinuité à la fois, d'effective réciprocité entre ces deux niveaux. Il est assurément indéniable, d'une part, qu'il y ait une continuité fondamentale (une sorte d'interaction dynamique bidirectionnelle, en forme de boucles qui rétroagissent, pourrait-on dire) entre la manière dont évoluent (ontogénétiquement, phylogénétiquement et à travers l'environnement de chaque individu) les propriétés et les fonctions neurophysiologiques dont sont capables les substrats cérébraux et les états et événements « mentaux » qui peuvent en résulter et qui correspondent à telle ou telle configuration morphologique, à telle ou telle structure dynamique du cerveau. De l'autre, il faut considérer, du fait de la grande plasticité morpho-fonctionnelle de celui-ci, que la perception et la pensée exercent en retour une action importante sur le développement et fonctionnement de

notre système nerveux central et notamment sur la plasticité cérébrale, si bien qu'on peut dire, d'un côté, que c'est un type précis de structure anatomique-fonctionnelle et certaines propriétés neurophysiologiques de notre système central qui rendent possible la pensée, mais, de l'autre, que ce sont la pensée (la conscience que nous avons de cette pensée) et l'action qui souvent l'accompagne qui au fond favorisent et canalisent le développement de notre cerveau. Il s'agit de deux aspects ou niveaux d'organisation et d'expression profondément liées d'un même phénomène neurophysiologique-cognitif.

Une hypothèse analogue a été avancée, il y a quelques années, par le neurophysiologiste John Eccles (1994). En refusant toute conception foncièrement matérialiste ou « naturaliste » du rapport corps-esprit, qui ont en commun le fait de postuler un monisme ou une identité entre l'activité neuronale et la pensée, il a avancé l'hypothèse que des événements immatériels tels que la conscience, la mémoire, l'imagination, les émotions, la volonté, etc., sont à même d'exercer une certaine action sur des organes matériels (biologiques) tels que les neurones et les synapses du cortex cérébral. Il ne s'agit pas seulement, comme William James l'avait suggéré (1890, vol. 1, chap. I), de la possibilité que l'esprit soit une propriété que s'est donnée le cerveau lorsqu'il est devenu trop complexe pour gérer son propre fonctionnement, mais de l'hypothèse beaucoup plus radicale selon laquelle, pour résumer, le monde de la matière et de l'énergie (donc l'activité proprement physico-chimique du cerveau) serait en interaction causale avec le monde des états et événements mentaux (la sphère de la pensée dans un sens très large). En appui à cette conjecture, Eccles invoque des recherches et plusieurs résultats expérimentaux montrant que certains types d'événements mentaux ont pour effet de susciter une activité du cortex cérébral. Par exemple, une expérience réalisée sur des primates décrit comment une intention, un acte de volonté, peut faire naître dans l'aire motrice supplémentaire (AMS) au sein du cerveau (dont on suppose qu'elle joue un rôle dans le déclenchement volontaire du mouvement) une vaste gamme de réactions neuronales qui aboutissent à l'ensemble complexe des mouvements qu'il faut faire pour exécuter telle ou telle action. Il est important en plus de préciser qu'il s'agit de mouvements volontaires et non pas d'automatismes, et que souvent le sujet se livre à ce qu'on appelle une « programmation intérieure » de la séquence de mouvements, c'est-à-dire qu'il répète dans son for intérieur les mouvements successifs mais sans en exécuter aucun.

Il convient d'expliciter davantage les considérations faites sur le rapport corps-esprit. Les théories monistes de l'identité entre le neural et le mental, quoiqu'elles aient eu le mérite de reconnaître l'importance qu'il y a à prendre en compte la relation causale entre le monde matériel, dont relèvent les substrats des états neurophysiologiques du cortex cérébral, et le monde des actes et événements mentaux, n'ont pas pu éviter tôt ou tard d'aboutir à une position foncièrement réductionniste sur la perception et notamment sur la question des relations entre l'action du corps

et l'activité de l'esprit. On peut la résumer ainsi : il y a une surdétermination du « monde mental » par la « réalité matérielle » ; autrement dit, la sphère de la conscience (et tous les actes qui forment sa constellation variée) peut être décrite et comprise, par une série de passages qui représentent autant d'opérations d'une réduction physico-mathématique, grâce à des explications de nature causale qui renvoient directement à certains phénomènes et principes du monde matériel ou à des substrats neurophysiologiques du cortex cérébral, ce qui en l'occurrence revient au même ; c'est bien là, d'ailleurs, le point central du projet cognitiviste de « naturalisation » de la perception et de la conscience.

Ces deux postulats sont loin d'être justifiés et encore moins démontrés. Il est temps de démystifier cette idée qui s'est rapidement installée dans les esprits autour du paradigme cognitiviste-réductionniste, qui consiste à faire croire que beaucoup de propriétés de l'esprit, de la pensée et du langage finiront par être dévoilées une fois que la perception et la conscience seront complètement naturalisées, c'est-à-dire ramenées à la connaissance certaine de leur substrat physico-chimique. On remarquera d'abord que déjà en ce qui concerne la perception visuelle, il faut bien insister sur la différence irréductible entre le « visible » – en tant qu'il tombe sous le sens de la vue ou qui appartient à notre champ de vision – et la « vision », qui ne se réduit pas à ce qui est immédiatement et directement vu ou visible. En fait, la vision est moins un dispositif purement sensoriel de l'organe de la vue (ou simplement une propriété physique du corps), qu'une modalité complexe et différenciée de la pensée, car non seulement elle nous permet de « voir » au-delà des limites physiques et physiologiques de la vue, mais également d'anticiper ce que nous pourrions voir et qu'il nous est matériellement impossible de voir temporairement ; dans cette anticipation l'imagination et la visualisation jouent un rôle essentiel.

Puis il y a la distinction riche de conséquences entre « visible » et « invisible », c'est-à-dire entre ce qui est situé dans le champ visuel même si dans une de ses zones les plus éloignées ou bien occultées à cause, par exemple, d'une faible luminosité ou de toute autre cause psychophysique, et ce qui est extérieur au champ visuel, déborde le visible et ne se donne daucune manière à être vu par les yeux. L'invisible peut se révéler être, à une autre échelle, comme l'autre face, l'image en miroir du visible, mais il peut par ailleurs cacher une toute nouvelle réalité caractérisée par d'autres propriétés et organisée selon des lois différentes. L'invisible peut se « loger » sous les replis du visible, appartenir à un autre niveau d'existence du même univers ; comme il peut, en revanche, n'exister qu'au-delà des limites spatiales et temporelles du monde visible et à la limite démentir tous les attributs qu'on lui prête comme « vrais ». On pense ainsi que plusieurs propriétés qui pourraient caractériser l'univers à l'échelle microscopique (le monde des particules subatomiques, de certaines molécules essentielles à la vie, de quelques phénomènes complexes en chimie, etc.), comme l'asymétrie spatiale, l'irréversibilité du temps, le principe de non-localité et d'autres encore, renversent pour ainsi dire l'image qu'on s'était faite de la réalité

macroscopique. De ce point de vue, la découverte de l'invisible fait plus appel à une vision « conceptuelle », à l'intuition et à l'imagination.

Dès lors on conçoit que la vision est multimodale, capable d'étendre le spectre des possibilités pour permettre la perception des formes des objets et de leurs qualités et d'en approfondir le sens. Elle est également susceptible de receler une variété de significations différentes suscitées par une interaction constamment renouvelée entre sujet et objet, entre perception et monde physique. Autrement dit, l'analyse du monde visuel n'est qu'un prélude à la façon que nous avons de réagir face à lui, laquelle comprend reconnaissance, action, idées, émotions, etc. Et la réaction évolue nécessairement avec l'apprentissage. Le même stimulus peut en effet susciter des réactions différentes selon les significations que nous avons apprises à lui attribuer. Plus important encore : c'est la signification que nous attribuons à un stimulus et à l'objet dont il émane qui permet de former l'unité du percept correspondant ; celui-ci recouvre sous le même sens plusieurs catégories de stimuli et même d'objets. Ce qui n'empêche pas, par ailleurs, une fois constituée l'assise solide du percept au moyen d'une représentation unitaire des différentes perceptions, de l'affiner conceptuellement et de le pluraliser sémantiquement. Ainsi, au caractère discret et séparé des stimuli visuels s'oppose le caractère continu et intégrateur de la perception et de la signification ; entre les deux se situe souvent le travail de l'interprétation ou de la modélisation. Et c'est d'ailleurs précisément au niveau de la signification qu'il existe un écart irréductible entre la chaîne causale des stimuli, depuis leur source physique jusqu'aux événements neurophysiologiques qui à travers la rétine puis les relais nerveux s'activent dans le cerveau, et les images mentales des objets extérieurs que nous formons sans cesse. À la clarification de ce rapport important entre l'action de l'intégration multisensorielle et le processus de la perception le neurophysiologiste britannique Charles Sherrington a apporté une contribution fondamentale : il a notamment montré le rôle que joue dans la perception l'intégration de l'action sensori-moteur, et le fait que l'activité synaptique de chaque neurone s'intègre dans des circuits neuronaux.

L'un des aspects fondamentaux dans les recherches sur la perception est celui de comprendre le rôle que jouent les propriétés globales des formes visuelles au niveau de la construction conceptuelle profonde par rapport aux propriétés locales des stimuli physiques provenant de l'environnement. D'où l'importance d'arriver à clarifier la relation entre ces deux types de propriétés. La description de nombreux phénomènes montre clairement qu'une caractéristique perceptive locale n'est pas seulement fonction de la stimulation locale, mais qu'elle est déterminée par des caractéristiques structurelles du champ perceptif global. Plus spécifiquement on a pu montrer (voir en particulier les travaux de Gaetano Kanisza) que les qualités chromatiques, à savoir les qualités sensibles correspondant aux couleurs, ne peuvent pas être considérées seulement comme un des *matériaux* à partir desquels s'organise la perception de l'espace ou des caractéristiques spatiales des objets, mais

qu'il faut aussi tenir compte de l'influence que l'organisation spatiale exerce sur l'aspect de l'élément chromatique lui-même. Espace et couleur ne sont donc pas des données distinctes, que l'on peut considérer isolément, mais bien plus des variables interdépendantes d'un processus unitaire global d'organisation perceptive. Ce lien entre l'espace et la couleur s'exprime notamment sous le rapport que la forme du contour d'une surface renferme avec le mode d'apparence phénoménal de la couleur. Plus précisément, Kanisza et d'autres théoriciens de la perception de la couleur ont prouvé que les qualités chromatiques d'une surface (d'un objet) ne peuvent pas être considérées comme étant en relation univoque avec les dimensions physiques correspondantes du rayonnement lumineux, mais bien plutôt que le résultat perceptif peut varier – pour un même ensemble de valeurs de ces dernières – en fonction du mode d'apparence, et donc en fonction des caractéristiques structurelles de l'organisation spatiale dont elles font partie.

Dans cette constitution, ordonnance et organisation de l'univers des couleurs, comme dans le rôle que tient cet univers pour la présentation des rapports spatiaux et objectifs, on a affaire à l'opération de l'imagination productrice que Kant a désignée comme un élément nécessaire de la perception. Il s'agit là d'un acte de formation primaire qui concerne et enfin rend possible l'intuition en tant que totalité, et dont un des stades supérieurs serait celui de l'« idéation symbolique » que l'on peut faire correspondre au monde des prégnances subjectives. Ici, il n'y a ni vue ni rien de visible qui ne relève d'un mode quelconque de vision intellectuelle, s'appuyant sur des concepts, d'idéation en général. À partir du moment où on passe d'une forme de vision à une autre, c'est l'intuition même prise dans sa totalité, dans une unité indivise, et non pas un seul de ses moments isolés, qui subit une métamorphose caractéristique. C'est l'importance de cette imagination productrice qui a conduit Goethe à affirmer que toute vue « sensible » consiste toujours à voir avec les « yeux de l'esprit », et avant lui, Galilée et Kepler furent capables de voir avec les yeux de l'esprit, bien au-delà de ce que les lunettes astronomiques leur auraient permis de voir.

Ceux qui pensent qu'on peut expliquer la perception uniquement par des lois physico-chimiques et ses mécanismes neuronaux et les événements de la conscience par les états cérébraux sont naturellement enclins à essayer de réduire les aspects intuitifs et cognitifs de la perception à ses aspects physiques objectifs, et à considérer ceux-ci comme des faits fondamentaux et ceux-là comme un épiphénomène ou un accident de l'évolution.

Un dernier aspect que nous voudrions brièvement évoquer dans cette partie concerne la question du temps. Outre le rôle majeur qu'il revêt dans les théories scientifiques, notamment à partir du développement de la théorie thermodynamique à la fin du XIX^e siècle surtout aux idées nouvelles de Boltzmann, puis de la découverte de la relativité restreinte (1905) et générale (1915-16) par Einstein, et de la mécanique quantique (1925-26) au siècle dernier, la nature du temps a été un

sujet de prédilection aussi de la littérature métaphysique, et bien sûr en philosophie grâce aux travaux de Bergson, Husserl et Heidegger. Il suffit de penser aux réflexions pénétrantes qui nous ont été léguées par P. Valéry et L. Borges. Dans un conférence intitulée "Le temps", ce dernier écrit :

« Pourquoi n'imaginer qu'une seule série de temps ? Je ne sais pas si votre imagination accepte cette idée. L'idée qu'il y a plusieurs séries de temps et que ces séries de temps ne sont ni antérieures, ni postérieures, ni contemporaines – naturellement les éléments de cette série sont antérieurs, postérieurs ou contemporains les uns par rapports aux autres. Ce sont des séries différentes. Nous pourrions imaginer qu'il en va de même de nos êtres conscients. L'idée est que chacun de nous vit une série de faits et que cette série de faits peut être parallèle ou non à d'autres. Pourquoi accepter cette idée ? Elle est plausible ; on aurait ainsi un monde plus vaste, beaucoup plus étrange que le monde actuel. C'est l'idée qu'il n'y a pas un temps unique. Je crois que cette idée n'est pas rejetée par la physique actuelle... L'idée qu'il y a des temps divers. Pourquoi imaginer un temps unique, un temps absolu, comme l'imaginait Newton ? (...) Il est curieux de constater que des trois temps – le passé, le présent et le futur – dans lesquels nous avons divisé le temps, le plus difficile à concevoir, le plus insaisissable soit le présent, ! Le présent est aussi insaisissable que le point ? Car si nous imaginons celui-ci sans extension, il n'existe pas ; nous devons imaginer que le présent apparent est en quelque sorte un peu le passé et un peu l'avenir. C'est-à-dire que nous sentons le temps qui passe. Quand je parle du temps qui passe, je parle de quelque chose d'abstrait. Le présent n'est pas une donnée immédiate de la conscience. Nous sentons que nous évoluons dans le temps, c'est-à-dire que nous pouvons concevoir que nous passons du futur au passé ou du passé au futur mais à aucun moment nous pouvons dire au temps ; *Arrête-toi ! Tu es beau !* ... comme le souhaitait Goethe. Le présent ne s'immobilise pas. Un pur présent est impensable : il serait inexistant. Il comporte toujours une parcelle de passé et une parcelle de futur. Il semble que ce soit indispensable au temps ».

Citons un autre exemple. Dans la littérature espagnole et notamment dans celle magnifiquement représentée par Cervantes dans *Don Quijote de la Manche*, le temps naïf de l'individu n'est pas unidimensionnel, c'est un temps de retour, retour des saisons, du soleil, un temps dans lequel l'accumulation associée au vieillissement ne se fait pas d'une manière tristement bureaucratique. L'ascèse scientifique, quand elle est vécue comme une forme d'isolément vis-à-vis d'autres quêtes menées avec une authentique passion dans divers domaines, conduit à un appauvrissement considérable des possibilités de nature essentiellement poétique que recèle la perception naïve du temps. Toute la trame du récit de Cervantes est construite sur le thème de la dualité des attitudes mentales de don Quichotte, fou à ses heures, plein d'entendement et de sagesse quand il ne s'agissait pas du sujet central ou adjacent de sa folie. Cette dualité n'est point synonyme d'incompatibilité, d'incommensurabilité, car ces deux sortes d'attitudes se rejoignent, voire se complètent dans un espace et un temps nouveau

qui sont ceux de la représentation littéraire ; celle-ci transpose avec imagination la nature des choses et les traits du réel, dont les limites ne coïncident point avec celles de la réalité telle qu'elle existe. Cette dualité se manifeste comme une corrélation vivante entre la psyché d'un homme et sa complexion physique, entre les conditions naturelles et les phénomènes psychiques.

2. Imagination et mathématiques

Les recherches de Bernhard Riemann ont représenté une contribution majeure au développement de la pensée mathématique. Il a notamment révolutionné la géométrie en montrant que, d'un point de vue purement mathématique, la géométrie euclidienne peut être énoncée et comprise comme appartenant à la théorie générale des variétés et plus en général à la géométrie différentielle. Il faut bien voir que Riemann conçoit celle-ci d'une façon beaucoup plus générale qu'elle ne l'avait été avant lui : outre l'étude des courbes et des surfaces dans l'espace tridimensionnel ordinaire, la nouvelle géométrie différentielle élaborée par le mathématicien allemand envisage désormais ces figures comme des « objets » mathématiques intrinsèques et autonomes, et elle considère en même temps d'autres objets mathématiques tels que celui de variété différentielle. Ce ne sont plus les lois analytiques abstraites de ces objets qui intéressent au premier chef Riemann, mais plutôt leurs structures mathématiques essentielles et tout particulièrement celles géométriques et topologiques. Dans l'histoire des mathématiques modernes, Riemann a été celui qui a fait passer la pensée géométrique des lois à celle des structures : des mathématiques il incontestablement une conception structurale, toutefois alliée à une vision qualitative des objets mathématiques ; en plus, l'intuition et l'imagination y jouent un rôle fondamental pour la compréhension de leurs possibles transformations et déformations.

Une telle vision comporte déjà un dépassement d'une conception purement logique et formaliste des mathématiques. Elle ne peut pas non plus être rapprochée de l'idée bourbakiiste des mathématiques comme des théories déjà « propres » et « achevées », bien formalisée (axiomatisée) dans des structures algébriques figées au-delà desquelles il ne faut surtout pas chercher une signification autre. En revanche, Riemann voit les mathématiques en quelque sorte comme un organisme vivant doué d'un dynamisme interne, et dont les concepts et les structures qui lui appartiennent prennent naissance dans un mouvement même de la pensée qui fait constamment appel aux ressources de l'intuition et de l'imagination. Ces structures sont des entités idéales, des formes intelligibles « habitant » un univers abstrait, et en ce sens elles sont possibles, mais elles sont également des modèles s'actualisant dans des phénomènes réels. Elles s'inscrivent dans ce mouvement vital de la pensée par lequel nous essayons d'idéaliser les phénomènes réels peut-être pour être plus à même d'en élaborer des représentations signifiantes.

On remarquera que la mathématique est la première science à ne pas avoir des

objets matériels à proprement parler. En effet, elle élabore des objets qui existent d'abord et avant tout dans un monde idéal d'entités et de formes abstraites, bien que celles-ci ne soient pas nécessairement absolues, immuables et atemporelles, et qu'elles puissent même connaître des réalisations physiques concrètes. Or même le bourbakiste le plus orthodoxe ne pourrait pas nier que l'intuition géométrique est un élément essentiel du raisonnement mathématique. Pour citer juste un exemple, il n'aurait pas été possible de découvrir le théorème de classification des surfaces (variétés compactes de dim. 2) sans l'apport fondamental d'une certaine intuition et imagination géométriques. Le théorème dit que *toute surface fermée (compacte, sans bords), connexe et orientée S est homéomorphe (ou topologiquement équivalente) à l'une des trois variétés bidimensionnelles suivantes : la sphère, la somme connexe d'un certain nombre g de tores, la somme connexe d'un certain nombre g de plans projectifs.* En 1907, les mathématiciens Paul Koebe et Henri Poincaré énoncent et démontrent, de manière autonome, un autre résultat fondamental des mathématiques du XXe siècle et qui est lié profondément au précédent, appelé *théorème d'uniformisation : toute surface de Riemann simplement connexe (comme, par exemple, la sphère de Riemann) est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère.*

Ces deux résultats sont à mettre en relation avec la théorie de Marston Morse développée entre la fin des années 1940 et le début des années 1950. Cette théorie permet de caractériser la topologie des variétés différentielles en étudiant le comportement d'un certain type de fonctions lisses ; plus spécifiquement, de décomposer ou stratifier les variétés en parties plus « simples », c'est-à-dire en sous-variétés, à partir des points critiques de la fonction donnée évoluant dans une variété ayant certaines propriétés. C'est une théorie qui fait le lien entre les fonctions lisses et la structure topologique des variétés compactes. En d'autres termes, la théorie de Morse permet d'étudier la topologie d'une variété différentielle en analysant les lignes de niveau d'une fonction *générique* définie sur cette variété. Les concepts fondamentaux qu'elle a introduits ont permis d'explorer la relation complexe entre la géométrie, l'algèbre et la topologie, et contribué à mieux comprendre la forme et les différentes structures des espaces mathématiques. La théorie de Morse, aujourd'hui piètre angulaire de la géométrie et topologie différentielles, est un magnifique exemple montrant, étape par étape et sans suivre une logique préétablie, en quoi consiste le travail à l'œuvre de l'intuition et de l'imagination en mathématiques ; dans cette théorie méthodes et techniques s'auto-alimentent pour dévoiler de nouvelles structures et propriétés inhérentes aux espaces. À propos de la théorie de Morse, le mathématicien René Thom, qui a fait des contributions fondamentales à la théorie, a écrit : « Pour ceux qui voient dans les mathématiques une construction bien réglée s'ordonnant logiquement selon une taxonomie bien établie, la théorie de Morse pose un problème. Elle touche à l'analyse, à la géométrie différentielle locale, à la topologie globale. Mais elle n'appartient en propre à aucune de ces disciplines, elle est strictement inclassable ; d'une part, elle se trouve à l'origine de presque tous

les grands courants de la mathématique récente ; de l'autre, elle domine, telle un énigmatique monolithe, une bonne part du paysage mathématique contemporain. Ce monolithe, nous n'avons pas fini de l'interroger ».

Les mathématiques fécondes et « vivantes » sont celles qui associent au raisonnement analytique une image géométrique, une entité abstraite comme une fonction à un objet « réel » (« réel » pour le mathématicien). Par exemple, pour que la surface de Riemann soit une sphère, il suffit qu'il existe pour une courbe de degré fixé un assez grand nombre de *points doubles*, qui obligent la courbe à être *unicursale* : on peut dessiner les points réels dans le plan d'un seul tenant. Or des « faits » comme ceux que l'on vient de voir mobilisent l'imagination, même sans démonstration, et permettent de mieux comprendre les idées sous-jacentes. Ces idées, qui font appel à la géométrisation et visualisation de la pensée mathématique, nous apprennent en effet à chercher et à trouver d'autres manifestations de l'unité du monde que celles apparentes.

La représentation en topologie ne peut pas se passer d'un processus de « visualisation mathématique », d'idéalisation ou d'imagination. Cette visualisation fait appel à un nouveau type d'intuition, plus conceptuelle et en même temps plus picturale (diagrammatique), et résolument éloignée des sensations immédiates et de l'intuition empirique. En topologie, la figure, le dessin, le diagramme ou le graphe ne sont plus l'image de quelque chose, d'un objet extérieur que l'image se chargerait de représenter, mais sont eux-mêmes l'objet qui représente un univers de relations et de propriétés « cachées » absentes de l'image. On peut considérer qu'en topologie, la « sémiotisation » du statut de l'image est encore plus développée par rapport à d'autres sciences et elle atteint un niveau très fin. La topologie permet une autre approche dans l'étude des objets qui ne se restreint pas aux relations quantitatives des grandeurs et aux aspects visuels, mais considère davantage la forme (l' « image ») dans sa globalité, ainsi que le spectre des variations possibles (continues et discrètes) de ses configurations. Bref, la topologie a changé profondément notre pensée et culture scientifique de l'image.

La topologie est la science qui étudie les déformations continues des surfaces et des variétés à n dimensions. Par exemple, la tasse et la bouée sont bien sûr deux objets différents mais on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue qui n'introduit aucune déchirure ; en des termes plus mathématiques, la tasse et la bouée sont *homéomorphes* (ont la même forme). En topologie on arrive au paradoxe (selon le sens commun) de ne pas distinguer une tasse de café d'un beignet. De ce point de vue, la topologie est une science totalement contre-intuitive et non-visuelle (si l'on entend par intuition l'expérience immédiate de nos sensations ou même la perception de ce que nous voyons), mais, d'un autre côté, la topologie est guidée en grande partie par un effort d'intuition et d'imagination profondément conceptuel, qui se situe à la frontière du perceptible et de l'imperceptible, et elle puise constamment

dans l'invisible en le transformant en un monde réel qui a pleinement son propre sens (objectif) et un sens pour nous (intersubjectif).

La connaissance est un processus dans lequel l'abstraction (la rigueur) et l'imagination (l'intuition) agissent de concert et où l'une a besoin de l'autre, devient féconde en présence de l'autre. L'élimination du rôle de l'intuition et de l'imagination dans la recherche scientifique conduirait à une aridité de la pensée, à une stagnation de la créativité, à une forme de scientisme réducteur et grossier. La recherche scientifique doit abandonner son aspect purement technique et applicatif pour renouer avec la réflexion individuelle et la recherche d'images mentales profondes. Ceci vaut aussi pour la mathématique, où à la recherche d'une pensée rigoureuse et exigeante (exprimée en un langage abstrait, sans toutefois tomber dans le pur formalisme) il faut associer l'intuition et l'imagination. Ainsi, elle perdra certainement en certitude, en rigueur formelle, mais elle acquerra une plus grande compréhension du monde réel et une importance "humaine". Sur ce thème a écrit de très belles et pénétrantes pages le mathématicien et philosophe des sciences français René Thom, que nous, et surtout les enseignants et leurs élèves, devrions relire et méditer. Sur ce même sujet, le mathématicien américain William Thurston, l'auteur d'idées et de résultats très profonds et originaux dans les domaines notamment de la géométrie et de la topologie, dont on peut citer tout particulièrement son *programme et sa conjecture de géométrisation* qui inclut aussi celle énoncée par Henri Poincaré en 1904 et qui a été résolue par le mathématicien soviétique Grigori Perelman en 2003, a écrit :

«To me the utilitarian goals of mathematics (...) are important, but secondary. Mathematics has a remarkable beauty, power, and coherence, more than we have ever expected. It is always changing, as we turn new corners and discover new delights and unexpected connexions with old familiar grounds. The changes are rapid, because of the solidity of the kind of reasoning involved in mathematics. (...) Mathematics is like a flight of fancy, but one in which the fanciful turns to be real and to have been present all along. Doing mathematics has the feel of fanciful invention, but it is really a process of sharpening our perception so that we discover patterns that are everywhere around. The natural reaction, when someone is having trouble understanding what you are explaining, is to break up the explanation into smaller pieces and explain the pieces one by one. This tends not to work, so you break up even further and fill in even more details. (...) But human mind does not work like computers: it is harder, not easier, to understand something broken down into all the precise little rules than to grasp it as a whole. It is very hard for a person to read a computer assembly language program and figure out what it is about. A computer reads and executes it in the blink of an eye. But the powerful computer in the world is not clever enough to drive a car safely, or control a stroll along the sidewalk, or come up with an interesting mathematical discovery. There is natural and strong tendency, in thinking mathematics, to use the logical order and to explain all the techniques and

answers before bringing up the examples and the questions, on the supposition that the student will be equipped with all the techniques necessary to answer them when they arise. *It is better to keep interesting unanswered questions and unexplained examples in the air; whatever not the students, the teachers, or anybody is yet ready to answer them. The best psychological order for a subject in mathematics is often quite different from the most efficient logical order. As mathematicians, we know that there will never be an end to unanswered questions.* In contrast, students generally perceive mathematics as something which is already cut and dried – they have just not gotten very far in digesting it. We should present mathematics to our students in a way which is at once more interesting and more like the real situations where students will encounter it in their lives – with no guaranteed answer » (les passages en italiques sont soulignés par nous).

La mathématique comporte une composante ludique (voire passionnelle) et une plus mystique, plus proche de la métaphysique et d'une certaine force spirituelle. Et en effet la mathématique peut être vue comme une sorte de métaphysique, au sens qu'elle va au-delà de la physique, à la fois sur le plan conceptuel et sur celui du langage. D'ailleurs, l'étymologie même du mot « métaphysique » indique que la mathématique fait abstraction de la physique, et qu'en plus d'idéaliser ses objets empiriques, elle découvre de nouveaux concepts, de nouvelles structures et propriétés de ces objets. Autrement dit, à travers l'intuition, l'imagination et l'abstraction créatrice la mathématique découvre des structures et propriétés du monde réel. Les exemples sont nombreux et particulièrement significatifs, citons les polyèdres, les symmetries (ou groupes), les surfaces minimales, la suite de Fibonacci et du nombre d'or, les noeuds et les tresses, les fractales, etc. D'une certaine manière on pourrait faire le même type de considération pour la philosophie, dont une des particularités consiste précisément à concevoir et élaborer de nouveaux concepts, souvent inattendus et contraires au sens commun.

3. Imagination et résistance (remarques diverses)

Les considérations précédentes font revenir à l'esprit les paroles passionnées et très profondes du poète et philosophe Giacomo Leopardi, qui nous paraissent encore plus appropriées aujourd'hui qu'elles ne l'étaient quand il les avait prononcées. Écrivait Leopardi: «All'uomo sensibile e immaginoso, che viva, come io sono vissuto gran tempo, sentendo di continuo e immaginando, il mondo e gli oggetti sono in un certo modo doppi. Egli vedrà cogli occhi una torre, una campana; udrà cogli orecchi un suono di una campana; e nel tempo stesso coll'immaginazione vedrà un'altra torre, un'altra campana, udrà un altro suono. In questo secondo genere di obbietti sta tutto il bello e il piacevole delle cose. Triste quella vita (ed è pur tale la vita comunemente) che non vede, non ode, non sente se non che oggetti semplici, quelli solo di cui gli occhi, gli orecchi e gli altri sentimenti ricevono la sensazione»

(«À l'homme sensible et inventif, qui vit, comme j'ai vécu longtemps, en ressentant continûment et en imaginant, le monde et les objets lui apparaissent en quelque sorte comme doubles. Il verra avec ses yeux une tour, une cloche ; il entendra avec ses oreilles le son d'une cloche, et en même temps avec l'imagination il verra une autre tour, une autre cloche, il entendra un autre son. Dans ce second genre d'objets réside toute la beauté et le plaisir des choses. Triste est cette vie (et pourtant telle est la vie communément) qui ne voit et qui n'entend que des objets simples, ceux dont seulement les yeux, les oreilles et les autres sens éprouvent des sensations » ; c'est nous qui traduisons).

Contrairement à ce que l'on pourrait penser au premier abord, dans ce passage le poète n'invite pas à fuir la réalité et encore moins il exalte la réalité virtuelle. Par ses mots, Leopardi tisse l'éloge de l'imagination créatrice et propose d'élargir notre vision des objets, pas seulement du point de vue de leur forme spatiale mais aussi de celui mental. Il dit que derrière un objet simple que nous voyons ou entendons à travers nos sensations, en réalité se cache un objet complexe qui au lieu de résulter de nos sensations est le produit de notre vision et imagination. La perception du monde autour de nous ne se limite donc pas à ce que nous voyons ou entendons à travers nos sens, puisque en réalité nous pouvons leurs attribuer d'autres qualités et significations.

En ce qui concerne l'apprentissage, on ne peut pas réduire l'expérience de l'école et de l'étude à une transmission codée d'informations (d'ailleurs la notion même d'information, qui s'est diffusée suite à l'essor de la cybernétique et de la théorie de l'information, n'est pas dépourvue d'une ambiguïté et confusion conceptuelle lorsqu'elle est utilisée dans divers domaines des sciences naturelles et sociales, par exemple en biologie). L'école est un lieu primordial où devrait se former le logos, la pensée rationnelle de tout individu et aussi la personne en tant qu'être relationnel et social. Elle est une expérience éducative et humaine qui dès le début requiert une « immersion » dans un espace et un temps qui ne sont nullement ceux du monde digital et de la réalité (artificiellement) virtuelle, aplatis sur la seule dimension d'un espace linéaire et automatisé qui repose sur une logique binaire et sur un présent toujours égal à lui-même et absolu. L'apprentissage et la formation de la pensée ont besoin d'un espace physique (corporel) et d'un espace interne, nécessaires pour murir l'imagination et faire bourgeonner l'intuition ; d'un temps scandé par une durée psychique et perceptive ; d'un temps intérieur lent et songé pour permettre la compréhension et la mémorisation. L'éducation et l'étude se nourrissent constamment d'une présence et d'une réflexion pluridimensionnelle qui, tout en admettant la limite (le doute, l'erreur et le paradoxe) comme un élément essentiel de l'apprentissage, ces dimensions sont projetées vers une recherche de l'infini comme concept idéal (comme vision mouvante de la pensée), et de l'inconnu comme horizon changeant du sens et du possible.

La vision de la science comme rébellion contre l'autorité, mais aussi contre

la misère et les inégalités sociales, contre les guerres, les armements et le conflit nucléaire, contre les injustices et la destruction de la planète, a été exprimée avec une très grande clarté dans une conférence tenue à Cambridge le 4 février 1923 à la *Society of Heretics* (ensuite parue dans un essai intitulé *Daedalus or Science & the Future*), par le généticien J. B. S. Haldane. Le passage suivant exprime bien la vision qu'avait Haldane du rôle du scientifique : « Plus que tout autre domaine, la science non seulement accorde plus de place à la raison, mais avec elle, encore plus qu'avec la politique, la philosophie ou la littérature, on peut changer le monde. (...) Nous devons donc considérer la science selon trois points de vue. D'abord, comme activité libre des fantastiques facultés humaines de la raison et de l'imagination. En deuxième lieu, comme réponse d'un petit nombre de personnes aux revendications de richesse, confort et succès par la majorité, qu'elle saura exaucer uniquement en échange de paix, de sécurité et de stabilité. Enfin, comme conquête graduelle de la part de l'homme d'abord de l'espace et du temps, puis de la matière en soi, puis de notre corps et de celui des autres êtres vivants, et enfin des éléments maléfiques et obscurs cachés dans son profond antérieur (dans son âme) ».

Aujourd'hui on est en présence essentiellement de deux logiques. La première, désormais attaquée de toute part, est une logique de la raison et de l'imagination, qui a besoin de silence, de l'écoute et de la discussion ; elle exalte et reconnaît la valeur de la réflexion et de la pensée critique, la place de l'individu dans l'étude et la compréhension, selon l'invocation de Saint Augustin « in te ipsum redi ». Il s'agit d'une logique qui analyse et approfondie ; elle est fondée sur la mémoire du précédent et comprend ce qui analyse et interprète sur la base de l'antécédent, et fait appel à l'intuition pour comprendre la réalité visible et invisible et pour concevoir le possible. À l'opposé, il y a la logique de la télévision, des médias et des réseaux sociaux, laquelle n'a aucune des qualités antérieures. Elle frappe l'individu avec la puissance de l'image de synthèse et le bombarde avec un essaim incessant d'informations hybrides et creuses, les premières l'hypnotisent, les secondes l'étourdisSENT. C'est une logique qui n'a besoin ni du passé ni du futur, car, en effet, elle est complètement écrasée sur l'immédiat, suspendue dans le présent et ne vibre que dans l'instant. Elle donne l'illusion de pouvoir offrir, au lieu d'une individualité complexe et cohérente, une personnalité multiple, mobile, serviable, qui s'adapte facilement et cependant prétend tout (aucun droit ne peut pas lui être refusé !)

Nous avons un grand défi devant nous : remettre l'humain au cœur de la vie ; préserver et développer l'intelligence, l'imagination et la sensibilité humaines. Baudelaire écrivait : « Ne méprisez la sensibilité de personne. La sensibilité de chacun, c'est son génie ». Le premier acte d'une authentique rébellion consiste à promouvoir des formes de vie émancipatrices de l'homme, de résister à toute tentative de le dominer et l'asservir ; de refuser le pourvoir nuisible de certaines technologies numériques qui génèrent dépendance et empêchent le développement de l'esprit

critique. La « vraie » rébellion aujourd’hui consiste à se réapproprier des réels espaces d’étude et de labeur, dans les écoles et à la campagne, comme dans d’autres lieux de travail ou à la maison. Et également du temps à dédier à la réflexion et à la discussion et aussi au silence où de nouvelles idées et dispositions d’esprit peuvent naître. Elle consiste à cultiver une pensée autonome et à donner impulsion à sa libre expression. La « vraie » rébellion est défendre et connaître la complexité et diversité de la nature, de l’homme et de ses mieux et milieux matériels et immatériels. Elle consiste également à pratiquer le pluralisme scientifique, philosophique et artistique face au pouvoir de la pensée unique et à de nouvelles formes de censure, parfois plus déguisées et perfides que celles pratiquées naguère. Il n’y a pas de rébellion sans une lutte contre la stupidité et l’insignifiance.

À la logique de la globalisation il faut opposer la logique de la diversité et complexité biologique et culturelle des individus et des communautés (les uns existent si les autres existent, et réciproquement) ; à la logique du marché et de la finance il faut opposer la logique de la coopération et du mutualisme ; à la logique du productivisme (ou de la croissance illimitée) et du profit il faut opposer la logique d’un juste équilibre entre l’homme et la nature, entre ses besoins et les capacités régénératrices des ressources naturelles disponibles, c’est dire de la sobriété ; à la logique qui poursuit la réduction de l’homme à une machine il faut opposer la logique d’un nouvel humanisme, où la place de l’homme dans la nature n’est plus d’être, selon une conception totalement anthropocentrique, le plus grand prédateur et consommateur de biens matériels et immatériels, mais d’être le plus grand défenseur et libérateur, suivant un esprit de connaissance, transformation, créativité

et affectivité, de la nature dans toutes ses formes et manifestations, du paysage comme microcosme naturel et milieu anthropique avec l'extraordinaire variété de ses stratifications historiques, architecturales et culturelles.

La vraie résistance n'est pas seulement une lutte contre un ennemi ou les envahisseurs, mais elle doit être d'abord et surtout une lutte pour un renouvellement profond dans la société dans laquelle on vit.

Il faut aujourd'hui résister à toutes les usurpations, mensonges et tentatives pour asservir les individus à un pouvoir cynique, corrompu, irresponsable et indifférent vis-à-vis des besoins réels des êtres humains, où par "résistance" il faudrait entendre un acte conscient et noble de courage, d'autonome et d'émancipation. Résister, c'est aussi s'engager, par les idées et les actions, dans un combat contre les injustices et les inégalités sociales, contre ceux qui tyrannisent d'autres êtres humains et contre les destructeurs de mondes, que ce soit des écosystèmes, des cultures, des langues ou des pratiques anthropologiques. Un combat également contre les grands monopoles financiers et du numérique mondiaux dont le projet est celui de réduire les êtres humains à des "clients" (adeptes du marché global) et de les transformer en "machines intelligentes" à travers une mutation inédite et irréversible de leurs circuits neuronaux et processus cognitifs. On veut aussi réduire et standardiser et de plus en plus la consistance et le sens de notre monde, de celui où fécondent et murissent la pensée critique et l'autonomie mentale, nos capacités de pouvoir réfléchir et agir sans être constamment soumis à des conditionnements publicitaires et aux manipulations médiatiques, bref à la barbarie des ragots et des vacarmes, à une information dégénérée. Cette réduction touche aussi la possibilité de participer réellement aux décisions qui nous concernent directement en tant qu'individus et membres d'une communauté, ainsi que des espaces vitaux comme ceux de la lecture et de l'écriture, des relations sociales, des choix de l'imagination, du jeu et du silence. On mentionnera enfin le bouleversement toujours plus rapide de nos rythmes temporels, soit physiologiques que cognitifs et émotionnels, dans une société qui a fait de la vitesse l'un de ses principaux modèles et bouts, avec la consommation individualiste et privée, l'automatisation des fonctions et l'annihilation des capacités critiques et imaginatives de l'homme.

Il y a plusieurs façons de résister, mais il y en a deux qui nous semblent être les plus essentielles et opérantes : premièrement il faut refuser d'obéir aveuglement à des décisions que nous considérons insensées et injustes ; deuxièmement, il ne faut pas faire ce qu'on estime être nuisible et contraire aux prérogatives essentielles de l'être humain.

Références bibliographiques

Alberro, B., *Évariste Galois : mathématicien, humaniste et révolutionnaire*, Elan

- Sud, 2007.
- Augé, M., *L'anthropologie et le monde global*, Armand Colin, Paris, 2013.
- Atiyah, M., *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- Bachelard, G., *L'air et le songe. Essai sur l'imagination*, Librairie José Corti, Paris, 1943.
- Bergson, H., *Matière et mémoire*, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- Bodei, R., *Dominio e sottomissione. Schiavi, animali, macchine, intelligenza artificiale*, Il Mulino, Bologna, 2019.
- Boi, L., "The role of intuition and formal thinking in Kant, Riemann, Husserl, Poincaré, Weyl, and in modern mathematics and physics", *Kairos, Journal of Philosophy & Science*, 21 (2), 2019, 1-53.
- Boi, L., "Images et diagrammes des objets et leurs transformations dans l'espace", *Visible*, 5 (2009), 77-109.
- Boi, L., "La géométrie : clé du réel ? Pensée de l'espace et philosophie des mathématiques", *Philosophiques*, 24 (2), 1997, 389-430.
- Boi, L., "Imagination and Visualization of Geometrical and Topological Forms in Space. On Some Formal, Philosophical and Pictorial Aspects of Mathematics," in *Philosophy of Science in the 21st Century – Challenges and Tasks*, O. Pombo and G. Santos (eds.), Documenta 9, Editions of CFCUL, Lisboa, 2016, 28-54.
- Boi, L., "La géométrie est plus que ses axiomes : philosophie des mathématiques et ontogenèse de la nature", *Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea*, Brasilia, 8(1), 2020, 139-173.
- Boi, L., "Conception dynamique en géométrie, idéalisation et rôle de l'intuition", *Theoria*, 10 (22), 1995, 145-161.
- Boi, L., "Sur la nature des objets mathématiques et les relations entre géométrie et physique", in *De la science à la philosophie (Hommage à Jean Largeault)*, M. Espinoza (éd.), Harmattan, Parigi, 2001, 197-246.
- Boi, L., "Elogio dell'intreccio, fra immaginazione, complessità e creatività", *Between*, 9 (17), 2019, 1-16.
- Boi, L., "Nodi, buchi e spazi nell'arte e nella scienza. Le profonde analogie tra creazione artistica e immaginazione scientifica," *Intersezioni*, 30 (3), 2010, 439-462.
- Boi, L., "Generazione e visualizzazione delle forme nello spazio: proprietà topologiche e percezione di superfici geometriche," *Visible*, 8 (2011), 1-46.
- Boi, L., *Morphologie de l'invisible. Transformations d'objets, formes de l'espace, singularités phénoménales et pensée diagrammatique*, Presses Universitaires de Limoges, 2011.
- Boi, L., *Pensare l'impossibile. Dialogo infinito tra arte e scienza*, Springer, Milano, 2012.
- Boi, L., U. Curi, L. Maffei, L. Miraglia (sous la responsabilité de), *In difesa*

- dell'umano. Problemi e prospettive*, Edizioni Vivarium Novum - Bibliopolis, Frascati-Napoli, 2022.
- Boi, L., *Punto e a capo. Per una rigenerazione della scuola*, Mimesis, Milano, 2025 (avec M. Maggino).
- Boi, L., *Vita e pensiero nel regno dell'insignificanza*, Asterios Editore, Trieste, 2025 (avec S. Isola).
- Borges, J. L., *Conférences*, trad. par F. Rosset, Folio, Paris, 1985.
- Brouwer, L. R. J., "Intuitionism and Formalism", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 20 (1912), 81-96.
- Bruce, V., Green, P., Bruyer, P. (éds.), *La perception visuelle: physiologie, psychologie et écologie*, Presses Universitaires de Grenoble, 2013.
- Bruno, G., *Dialoghi filosofici italiani*, a cura di M. Ciliberto, Mondadori, Milano, 2000.
- Camus, A., *L'homme révolté*, Gallimard, Paris, 1951.
- Cassirer, E., *La philosophie des formes symboliques*, vol. 3 : *La phénoménologie de la connaissance*, Editions de Minuit, Paris, 1976.
- De La Mettrie, J. O., *L'homme-machine* (1748), Fayard, Paris, 2000.
- Descartes, R., *Discours sur la méthode* (1637), présentation par L. Renault, Flammarion, Paris, 1978.
- Eccles, J., *Comment la conscience contrôle le cerveau*, Fayard, Paris, 1997.
- Einstein, A., *Comment je vois le monde*, Flammarion, Paris, 2017.
- Dyson, F., *Scientist as Rebel*, New York Review Books, 2006.
- Gramsci, A., *Pensare la democrazia. Antologia dai «Quaderni del carcere»*, a cura di M. Montanari, Einaudi, Torino, 1997.
- Grothendieck, A., *Récoltes et semailles*, I et II, Gallimard, Paris, 2021.
- Hagège, C., *Contre la pensée unique*, Odile Jacob, Paris, 2011.
- Hebb, D., *The Organization of the Behavior*, Wiley, New York, 1949.
- Hilbert, D. und S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932.
- Hanson, N. R., *Perception and Discovery: An Introduction to Scientific Inquiry*, Freeman, Cooper & Co., 1969.
- Holton, G., *L'imagination scientifique*, Gallimard, Paris, 1981.
- Husserl, E., *Chose et espace. Leçons de 1907 (Ding und Raum, Vorlesungen 1907)*, Presses Universitaires de France, Paris, 1989.
- Huxley, A., *Science, Liberty and Peace*, Chatto & Windus, London, 1947.
- Ingold, T., *Anthropology: Why it matters*, Polity, 2018.
- James, W., *The Principles of Psychology* (1890), Dover, New York, 1995.
- Kandel, E., *In search of memory: The emergence of a new science of mind*, WW Norton & CO., 2007.
- Kanisza, G., *La grammaire du voir*, Editions Diderot Arts Sciences, Paris, 1997.
- Kasner, E. and J. R. Newman, *Mathematics and the Imagination* (1948), Dover Publications, 2001.

- Latouche, S., *Décoloniser l'imaginaire. La pensée créative contre l'économie de l'absurde*, L'Aventurire, 2011.
- Leopardi, G., *Zibaldone di pensieri* (1817-1832), a cura di G. Pacella, Garzanti, Milano, 1991.
- Maffei, L., *Elogio della ribellione*, Il Mulino, Bologna, 2016.
- Manin, Yu I., *Mathematics as Metaphor. Selected Essays of Yu I. Manin*, American Mathematical Society, 2007.
- Merleau-Ponty, M., *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1945.
- Oliverio, A., *Immaginazione e memoria. Fantasia e realtà nei processi mentali*, Mondadori, Milano, 2013.
- Penrose, R., *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, Dunod, Paris, 1998.
- Penrose, R., *Les deux infinis et l'esprit humain*, Flammarion, Paris, 2011.
- Poincaré, H., "L'intuition et la logique en mathématiques", in *La Valeur de la Science*, Flammarion, Parigi, 1911 (cap. 1, pp. 11-34).
- Poincaré, H., *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1908.
- Ribot, Th., *Essai sur l'imagination créatrice*, F. Alcan, Paris, 1900.
- Riemann, B., "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", *Abh. Kgl. Ges. Wiss.*, Göttingen, 1868.
- Rousseau, J. J., *Discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité parmi les hommes* (1755), Gallimard, Paris, 1965.
- Sabato, E., *La resistencia*, Seix Barral, Buenos Aires, 2000.
- Saramago, J., *L'aveuglement*, Points, Paris, 2020.
- Shannon, C., *Théorie mathématique de la communication*, préface d'A. A. Moles, trad. de J. Cosnier, G. Dahan et S. Economides, Editions Retz, Paris, 1975 (la 1^{ère} éd. en anglais est de 1948).
- Sherrington, Ch., *The integrative action of the nervous system*, Oxford University Press, 1906.
- Simondon, G., *Cours sur la perception (1964-1965)*, Presses Universitaires de France, Paris, 2013.
- Thom, R., *Paraboles e catastrophes : entretiens sur les mathématiques, la science et la philosophie*, Paris, Flammarion, Paris, 1983.
- Thom, R., *Prédire n'est pas expliquer*, Flammarion, Paris, 1991.
- Thurston, W., "Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 (2), 1994, 161-177.
- Thurston, W., "Mathematical Education", *Notices of the AMS*, 37 (1999), 844-850.
- Varela, F., Rosch, E., Thompson, E., *L'inscription corporelle de l'esprit*, Seuil, Paris, 2017.
- Wertheimer, M., *Productive Thinking*, Harper, New York, 1945.
- Weyl, H., *Le continu et autres écrits*, trad. par J. Largeault, Vrin, Paris, 2007.
- Wiener, N., *Cybernétique et société : l'usage humain des êtres humains*, Points, Paris, 2014 (la 1^{ère} éd. en anglais est de 1949).